Matematika pro matematickou (pato)fyziologii

Michal Šitina

19. února 2022

Ústav patologické fyziologie
Lékařská fakulta
Masarykova univerzita Brno

Obsah

1 Stavební kameny matematiky **3**
1.1 Množina . . . 3
1.2 Zobrazení, funkce . . . 3
1.3 Komplexní čísla . . . 4

2 Úvod do matematické analýzy **6**
2.1 Funkce . . . 6
2.1.1 Inverzní funkce . . . 6
2.1.2 Transformace funkcí . . . 6
2.2 Přehled základních funkcí . . . 7
2.2.1 Polynomické funkce . . . 7
2.2.2 Exponenciální a logaritmické funkce . . . 10
2.2.3 Goniometrické funkce . . . 10

1 Stavební kameny matematiky

V této úvodní kapitole stručně popíšeme některé základní matematické pojmy a představy, které se vyskytují ve všech speciálních oblastech matematiky, jako jsou např. matematická analýza, algebra, teorie pravděpodobnosti nebo numerická matematika. Učebnice vyšší matematiky jsou většinou psány systémem ***Definice* – *Věta* – *Důkaz***. V našem kurzu budeme postupovat méně precizně, intuitivní cestou. Přesto je vhodné základním principům dobře rozumět.

Definice je přiřazení názvu jisté přesněji vymezené entitě. Sama o sobě neobsahuje žádnou novou informaci, žádný poznatek. Definice bývají často psány nepřesně jako implikace, tedy „Pokud platí to a ono, označujeme jej jako abc“. Vždy je ve skutečnosti rozuměna ekvivalence, tedy „Právě když platí to a ono, označujeme jej jako abc“.

Příklad definice: Reálná funkce jedné reálné proměnné je každé zobrazení z množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$. V tomto případě jsme entitě „zobrazení z množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$“ přiřadili název „reálná funkce jedné reálné proměnné“.

1.1 Množina

Množinou rozumíme souhrn jakýchkoli vzájemně odlišitelných elementů, prvků množiny, do jednoho celku. Představu množin prvně zformuloval německý matematik Georg Cantor[1]. Založil oblast matematiky dnes označovanou jako Teorie množin. V originále definuje Cantor množinu takto:

> Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Původní Cantorovu verzi označujeme jako Naivní teorii množin, jejíž nedostatky byly odhaleny na počátku 20. století a byla zprecizována v tzv. Axiomatické teorii množin, spojené se jmény Zermelo a Fraenkel. Teorie množin je absolutním základem matematiky, snad vše v matematice lze převést na operace s množinami.

1.2 Zobrazení, funkce

Často nás zajímá vztah dvou množin A a B, tedy souvislost mezi jednotlivými prvky. Taková souvislost se velmi obecně označuje jako ***relace***. Každému prvku jedné množiny může být přiřazeno více prvků druhé množiny nebo nemusí být některému prvku přiřazen žádný prvek. Velmi speciální, ale nejdůležitější relace, kdy je každému prvku množiny A přiřazen právě jeden prvek množiny B, se označuje jako ***zobrazení*** nebo ***funkce***. Funkce a zobrazení jsou obvykle vnímána jako synonyma. Pokud prvky množiny A označíme x a množiny B y, pak zápis

$$f : A \to B; x \to y$$

[1] Georg Cantor, 1845-1918, německý matematik, založil Teorii množin

znamená zobrazení f z množiny A do množiny B, které každému $x \in A$ přiřazuje $y \in B$. Množinou A mohou být např. všichni občasné České republiky, množinou B reálná čísla ($B = \mathbb{R}$). Zobrazení „měření výšky“ zapíšeme jako

$$\text{měření výšky} : \text{občané ČR} \to \mathbb{R}; \text{občan} \to \texttt{výška}$$

.

1.3 Komplexní čísla

Známe několik nekonečných množin čísel, např. přirozená čísla $\mathbb{N}$, celá čísla $\mathbb{Z}$, racionální čísla $\mathbb{Q}$ nebo reálná čísla $\mathbb{R}$. Nad těmito množinami jsou definované jisté operace, t.j. co můžeme s čísly dělat. Přirozená čísla můžeme sčítat a násobit, přičemž výsledek je opět přirozené číslo, ale nemůžeme např. odečíst větší číslo od menšího. To můžeme provádět s celými čísly, ta ale např. nemůžeme libovolně dělit. K tomu už potřebujeme ještě větší množinu čísel, totiž racionální čísla, která jsou vyjádřitelná zlomkem. Racionální čísla jsou první nekonečnou množinou čísel, s nimiž můžeme provádět všechny běžné operace s čísly a výsledek je vždy racionální číslo. Jak už ale zjistili v antickém Řecku, některá čísla, např. $\sqrt{2}$, mezi racionální nepatří. Pokud racionální čísla obohatíme o tato tzv. iracionální čísla, dostaneme reálná čísla. Na okraj poznamenejme, že iracionálních čísel je mnohem více než čísel racionálních.

Kromě reálných čísel ale existuje ještě jedna (a už žádná další!!) nekonečná množina poněkud zvláštních čísel, označovaných jako ***komplexní čísla***, s nimiž lze počítat jako s „normálními“ čísly. Neexistuje žádné reálné číslo, které umocněno na druhou dá -1. Definujme si proto nějaké nové číslo i, které není reálné, říkejme mu imaginární, pro nějž platí $i^2 = -1$. Vezměně dvě reálná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ a definujme nové číslo jako

$$z = a + bi$$

Množinu všech takových čísel označme jako komplexní čísla $\mathbb{C}$. Pokud s nimi budeme „normálně“ počítat, zjistíme, že vše bez problémů funguje. Dvě komplexní čísla vynásobíme např. takto

$$(3 + 2i) \,.\, (4 - 3i) = 12 - 9i + 8i - 6i^2 = 12 - i - 6.(-1) = 18 - i$$

Komplexní číslo obsahuje dvě „proměnné“ a a b, dá se proto zobrazit jako bod v plošném grafu, v tzv. Gaussově[2] rovině (obr. 1.1), kdy reálnou část a vynášíme na osu x a imaginární část b na osu y. Velikost neboli absolutní hodnota komplexního čísla $\|z\|$ je vzdálenost bodu od počátku, platí

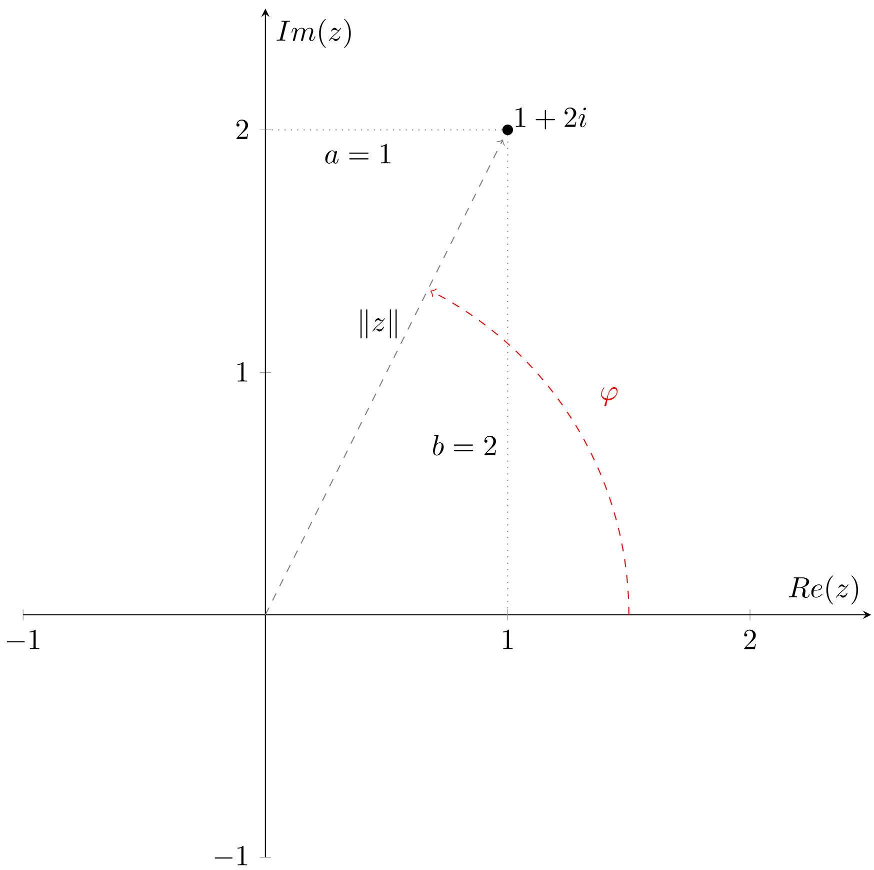
$$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Spojnice bodu a počátku svírá s osou x úhel φ, označovaný jako fáze komplexního čísla. Platí proto $a = \|z\| . \cos\varphi$ a $b = \|z\| . \sin\varphi$. Komplexní číslo tedy můžete vyjádřit pomocí goniometrických funkcí jako

$$z = a + bi = \|z\| \cos\varphi + i\|z\| \sin\varphi = \|z\| \left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right)$$

Absolutní hodnota $\|z\|$ bývá též označována jako amplituda komplexního čísla A.

[2] Carl Friedrich Gauss, 1777-1855, německý matematik a fyzik



Obrázek 1.1: Komplexní číslo v Gaussově rovině

2 Úvod do matematické analýzy

2.1 Funkce

Pojmy zobrazení a funkce jsou většinou chápány jako synonyma. V užším smyslu rozumíme pod ***reálnou funkcí jedné reálné proměnné*** zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to y = f(x)$. Některé funkce jsou definované na podmnožině $\mathbb{R}$, např. logaritmická funkce na $\mathbb{R}^+$. x a y se označují jako argument a hodnota (či obraz) funkce. Argument pochází z definičního oboru funkce $\mathcal{D}$, $x \in \mathcal{D}$, obraz z oboru hodnot $\mathcal{H}$, $y \in \mathcal{H}$. Ve výše uvedeném případě platí $\mathcal{D} = \mathcal{H} = \mathbb{R}$.

2.1.1 Inverzní funkce

Funkce f přiřazuje jistému x hodnotu y, $y = f(x)$. Mohla by nás však zajímat i opačná otázka, totiž kterému x byla přiřazena hodnota y. Hledáme tedy vlastně funkci, která dělá opak než funkce f. Označujeme ji jako ***inverzní*** a značíme f^{-1}. Platí

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Ne vždy lze inverzní funkci vytvořit. Pokud existuje více hodnot x, jimž funkce f přiřazuje stejné y, pak nemůžeme určit, které x by měla inverzní funkce přiřadit tomuto y. Pro invertabilitu tedy musí být funkce f prostá a navíc musí pokrývat celý obor hodnot, x a y tedy musí být vzájemně jednoznačné. Např. funkce $y = x^2$ není prostá v celém definičním oboru $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Pokud ji však omezíme na $\mathbb{R}^+$, prostá již je a jí odpovídající inverzní funkce je $f^{-1}(x) = \sqrt{y}$. Poznamenejme, že je lhostejné, jakými písmeny označíme argument a obraz, určující pro funkci $\sqrt{y}$ je $\sqrt{}$. Protože je zvykem používat x pro argument a y pro obraz, píšeme $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Pokud takto zakreslíme f i f^{-1} do společného grafu, jsou oba grafy symetrické podle osy $y = x$ (poněvadž jsme zaměnili x a y), viz obr. 2.4.

2.1.2 Transformace funkcí

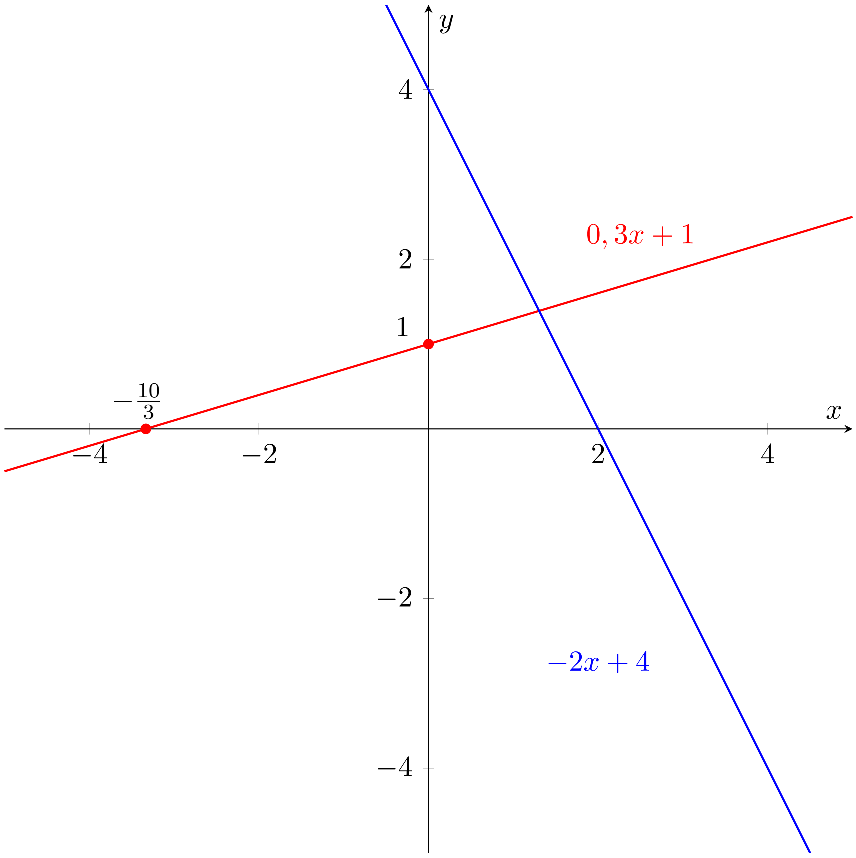
Drobnou úpravou funkce můžeme dosáhnout úpravy jejího „tvaru“, např. posunout na osách x a y nebo roztáhnout či zúžit. Mějme funkci $y = f(x)$. Novou, transformovanou funkci označme jako $g(x)$.

1. **Posunutí na ose y** o konstantu c nahoru dosáhneme přičtením c, $g(x) = f(x) + c$
2. **Posunutí na ose x** o konstantu c doleva dosáhneme přičtením c v argumentu funkce, $g(x) = f(x + c)$
3. **Zvětšení na ose y** k-krát dosáhneme vynásobením funkce konstantou k, $g(x) = kf(x)$
4. **Zkrácení na ose x** k-krát dosáhneme vynásobením argumentu funkce konstantou k, $g(x) = f(kx)$

Kombinací všech úprav získáme funkci

$$g(x) = af(bx + c) + d$$

která je oproti původní funkci f posunuta o d nahoru, a-krát roztažena na ose y, b-krát užší na ose x a posunuta na ose x o c/b doleva.



Obrázek 2.1: Lineární funkce

2.2 Přehled základních funkcí

Známe řadu tzv. elementární funkcí, z nichž jsou „sestaveny" ostatní funkce. Existují však i funkce, které nelze takovou kombinací vyjádřit. Např. primitivní funkce (neurčitý integrál) ke Gaussově „zvonové" funkci existuje, ale není vyjádřitelná pomocí elementárních funkcí. Jiné funkce, např. exponenciální nebo goniometrické, mohou být formálně definovány pomocí nekonečné řady mocninných funkcí. Dále je uveden přehled vybraných elementárních funkcí, s nimiž se běžně setkáváme.

2.2.1 Polynomické funkce

Nejjednodušší polynomickou funkcí je konstantní funkce $y = c$. Další v řadě je ***lineární funkce*** $y = ax + b$ (obr. 2.1). Funkce protíná osu y v hodnotě b, kdy platí $f(0) = a.0 + b = b$, a osu v bodě $-b/a$, kdy platí $0 = ax + b$. a označujeme jako směrnici přímky, platí $a = \tan\varphi$, značí rychlost růstu přímky. Poznamenejme, že lineární funkce je prvního řádu, t.j. nejvyšší exponent u x je 1, a funkce protíná osu x v právě 1 bodě.

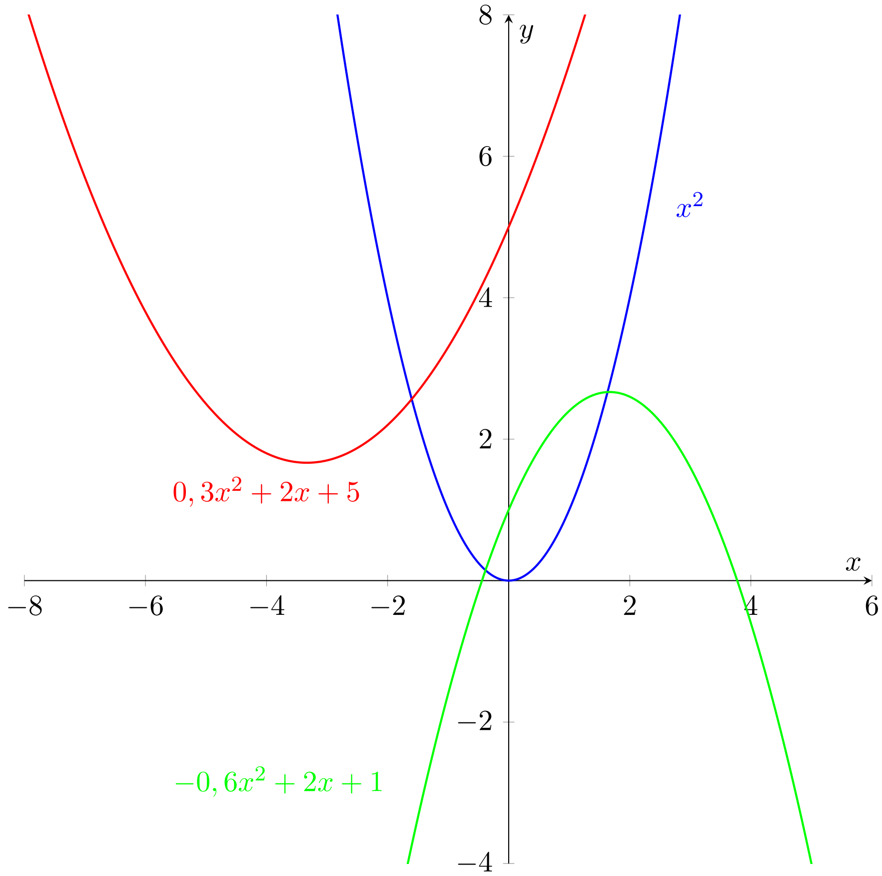
Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$ je druhého řádu a protíná osu x nejvýše ve 2 bodech, tzv. kořenech kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Jsou jimi

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

V oboru komplexních čísel má kvadratická rovnice vždy 2 řešení. Křivka kvadratické funkce se



Obrázek 2.2: Kvadratické funkce

označuje jako parabola, několik parabol zobrazuje obr. 2.2.

Kubická funkce $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ je třetího řádu a protíná osu x nejvýše ve 3 bodech, kořenech kubické rovnice

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Několik kubických funkcí je na obr. 2.3. S rostoucím řádem funkce je „stále obtížnější vymýšlet“ názvy koeficientů a je snazší používat indexy. Můžeme tedy napsat

$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

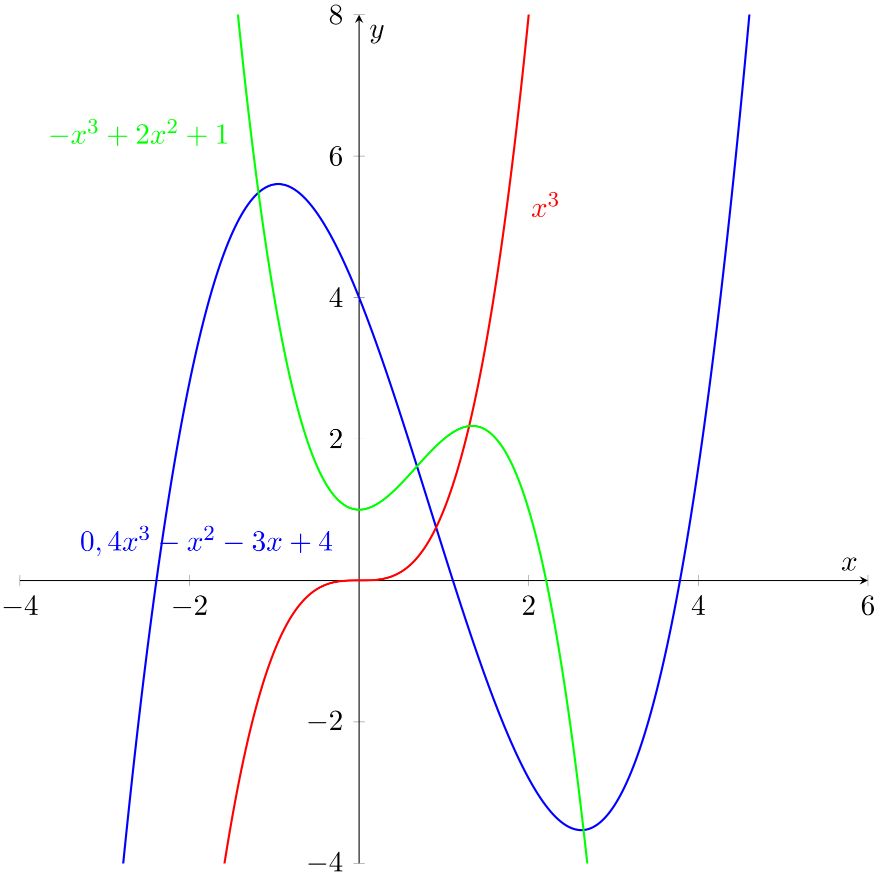
Polynom n-tého stupně je

$$y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

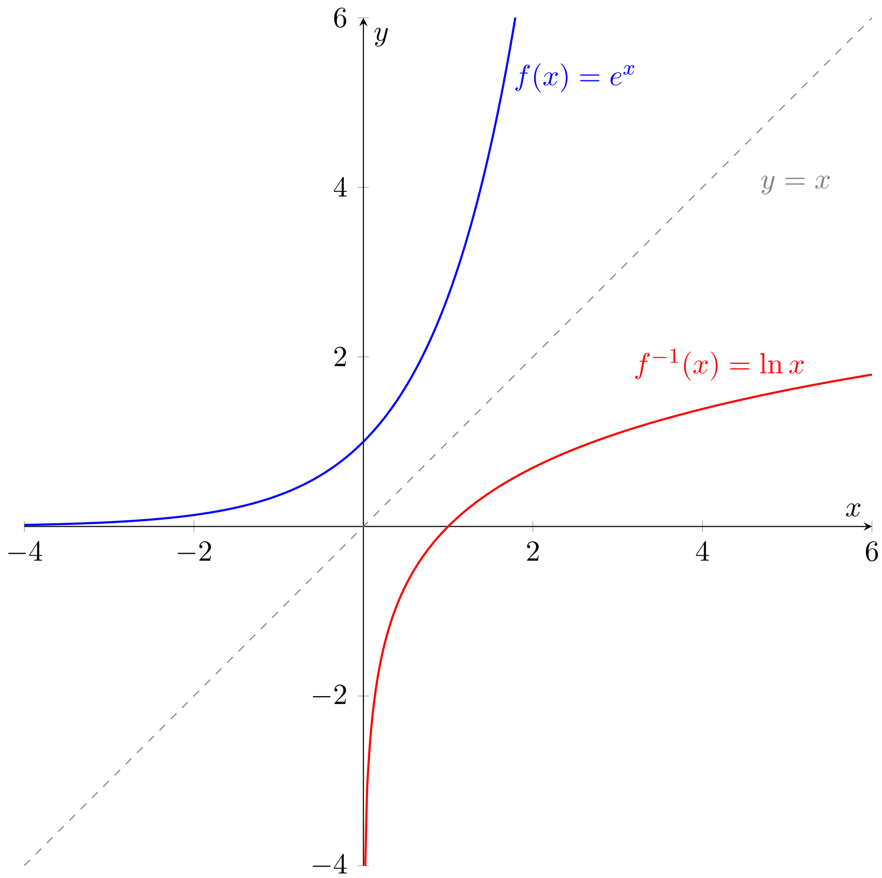
Pokud použijeme symbol součtu $\sum$, můžeme stejný polynom elegantně zapsat takto:

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

Polynom n-tého stupně má n kořenů v oboru komplexních čísel. Lze jím přesně proložit n+1 body.



Obrázek 2.3: Kubické funkce



Obrázek 2.4: Exponenciální a logaritmická funkce

2.2.2 Exponenciální a logaritmické funkce

Řadu procesů, jako např. eliminaci léku ledvinami, lze popsat ***exponenciální funkcí*** $y = a^x$. Jako a se obvykle používá Eulerovo číslo[1] $e \approx 2,718$, tedy $y = e^x$. Exponenciální funkce, viz obr. 2.4, roste extrémně rychle. Inverzní k exponenciální funkci je ***logaritmická funkce*** $y = \log_a x$, viz obr. 2.4, a se označuje jako základ logaritmu. Platí

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Pokud $a = e$, označuje se logaritmus jako přirozený a značí se ln, tedy $y = \ln x$.

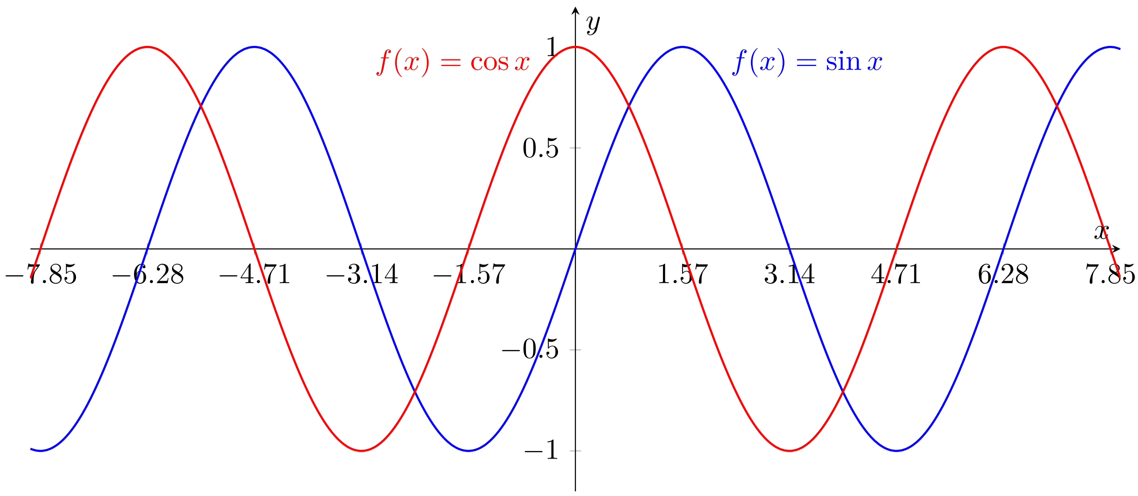
2.2.3 Goniometrické funkce

Pro popis periodických dějů se používají periodické goniometrické funkce sinus a cosinus (obr. 2.5), které se liší pouze posunutím o $\pi/2$ na ose x. Perioda obou funkcí je 2π. Pomocí těchto funkcí lze vyjádřit i komplexní číslo z jako

$$z = A (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

A se označuje jako amplituda a φ jako fáze komplexního čísla. Euler zjistil mimořádnou souvislost mezi komplexní exponenciální funkcí a goniometrickým vyjádřením komplexního čísla. Eulerův

[1] Leonhard Euler, 1707-1783, švýcarský matematik a fyzik



Obrázek 2.5: Goniometrické funkce

vztah, někde popisovaný jako nejkrásnější vztah matematiky, zní

$$A\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = Ae^{i\varphi}$$